



## Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a VI-a

**SOLUȚII**

**Problema 1.** Să se determine trei numere naturale prime  $a, b, c$  care îndeplinesc condițiile:  $(a + b + c) \cdot (5 \cdot a + 15) = (5 \cdot a - 4) \cdot (48 - c) \cdot b$  și  $a < b < c$ .

**Manea Marcel, profesor, Galați**

**Soluție:** Dacă toate cele trei numere prime ar fi impare, ar rezulta o contradicție (număr par = număr impar). Atunci unul este număr par prim. Rezultă  $a=2$ . Înlocuind în egalitatea din ipoteză, obținem:

$$\left. \begin{array}{l} (2 + b + c) \cdot 25 = 6 \cdot (48 - c) \cdot b \\ (5, 6) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 5/b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow c = 23;$$

Dacă 5 nu divide pe  $b \Rightarrow 25 / (48 - c) \Rightarrow c = 23 \Rightarrow b = 5$  (*fals*).

Numerele căutate sunt: 2, 5, 23.

**Problema 2.** Dacă  $a, b, c$  sunt numere raționale pozitive, diferite de zero și

$$\frac{2010}{a+3} + \frac{2010}{b+4} + \frac{2010}{c+5} = 2009, \text{ să se calculeze } \frac{a+2}{a+3} + \frac{b+3}{b+4} + \frac{c+4}{c+5}.$$

**Florin Antohe, profesor, Galați**

**Soluție :**

$$\frac{2010}{a+3} + \frac{2010}{b+4} + \frac{2010}{c+5} = 2009 \Leftrightarrow \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+4} + \frac{1}{c+5} = \frac{2009}{2010};$$

$$\frac{a+2}{a+3} + \frac{1}{a+3} + \frac{b+3}{b+4} + \frac{1}{b+4} + \frac{c+4}{c+5} + \frac{1}{c+5} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+2}{a+3} + \frac{b+3}{b+4} + \frac{c+4}{c+5} = 3 - \frac{2009}{2010} = \frac{4021}{2010}.$$

**Problema 3.** Fie numărul  $A = 1234...200820092010$ .

- Să se calculeze suma cifrelor numărului A.
- Să se stabilească dacă numărul A este pătrat perfect.

c) Să se stabilească câte numere pătrate perfecte se pot obține schimbând ordinea cifrelor numărului A.

**Petre Bătrânețu, profesor, Galați**

**Soluție: a).** Numărul 1999 este numărul care are suma cifrelor cea mai mare față de toate numerele de la 1 la 2010. Numerele naturale mai mici decât 1999 se grupează astfel:  $(1;1998), (2;1997), (3;1996), \dots, (999;1000)$ . În fiecare grupă, suma cifrelor este 28. Suma cifrelor celorlalte numere rămase este: 28 pentru numărul 1999, 2 pentru numărul 2000, 3 pentru numărul 2001, ..., 11 pentru numărul 2009, 3 pentru numărul 2010.

Așadar, suma cifrelor numărului A este :

$$999 \cdot 28 + 28 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 3 = 28068.$$

b). Numărul 28068 se divide cu 3 dar nu se divide cu 9, deci, numărul A nu este pătrat perfect.

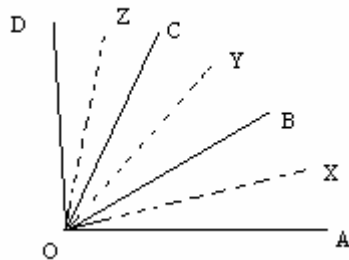
c) Oricum s-ar schimba ordinea cifrelor numărului A, suma cifrelor va rămâne aceeași. Rezultă că nu se obține nici un număr pătrat perfect.

**Problema 4.** Se consideră unghiurile  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$  astfel încât unghiurile cu o latură comună sunt adiacente.

Fie  $[OX], [OY], [OZ]$ , bisectoarele unghiurilor  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ , respectiv  $\angle COD$ . Știind că  $m(\angle XOC) = 30^\circ$ ,  $m(\angle YOD) = 40^\circ$ ,  $m(\angle XOB) + \frac{1}{2}m(\angle COZ) = 25^\circ$ , să se calculeze măsurile unghiurilor  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$ .

**Dumitru și Rodica Bălan, profesori, Galați**

**Soluție:** Notăm  $m(\angle AOB) = a$ ,  $m(\angle BOC) = b$ ,  $m(\angle COD) = c$ .



Relațiile date în ipoteză se scriu astfel:

$$\begin{aligned} m(\angle XOC) = 30^0 &\Leftrightarrow m(\angle XO B) + m(\angle BOC) = 30^0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 30^0 &\Leftrightarrow \frac{a}{2} + b = 30^0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m(\angle YOD) = 40^0 &\Leftrightarrow m(\angle YOC) + m(\angle COD) = 40^0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\angle BOC) + m(\angle COD) = 40^0 &\Leftrightarrow \frac{b}{2} + c = 40^0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m(\angle XO B) + \frac{1}{2}m(\angle COZ) = 25^0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\angle AOB) + \frac{1}{4}m(\angle COD) = 25^0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{c}{4} = 25^0 &\Leftrightarrow \frac{c}{2} + a = 50^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Adunând membru cu membru relațiile (1), (2) și (3), obținem:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + b + \frac{b}{2} + c + \frac{c}{2} + a = 30^0 + 40^0 + 50^0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + b + c) + a + b + c = 120^0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a + b + c) = 120^0 &\Leftrightarrow a + b + c = 80^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Relația (2) se scrie astfel:  $\frac{b}{2} + c = 40^0 \Leftrightarrow b + 2c = 80^0$  și cum din relația (4)

avem  $a + b + c = 80^0$ , obținem  $2c = a + c$ , de unde  $c = a$ .

Înlocuind  $c = a$  în relația (3), obținem

$$\frac{a}{2} + a = 50^0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a = 50^0 \Leftrightarrow a = \frac{100^0}{3} = 33^020'. \text{ Rezultă } c = a = 33^020'.$$

Relația (4) devine  $b + 66^040' = 80^0$ , de unde  $b = 80^0 - 66^040' = 13^020'$ .

Așadar,  $m(\angle AOB) = a = 33^020'$ ,  $m(\angle BOC) = b = 13^020'$ ,

$m(\angle COD) = c = 33^020'$ .